ARBEITSBLATT ZU PARAMETERDARSTELLUNG VON GERADEN

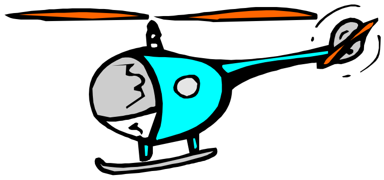
Beim Besteigen eines Berges gerät ein Bergsteigerteam in Not und funkt nach Hilfe.

a) Die Funksignale werden von der Bergwacht, die sich im Ursprung des

Koordinatensystems befindet, aus der Richtung $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und von einem Hubschrauber $H_1(-2|26|1)$ aus der Richtung $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgenommen (alle Koordinatenangabe in km).

Bestimmen Sie die Unglücksstelle S des Bergsteigerteams.

b) Die beiden Hubschrauber H_1 und $H_2(0|20|1{,}5)$ werden zum Unglücksort geschickt. H_2 kontrolliert an seinem Standort die angegebenen Koordinaten von S und startet dann mit 30 s Verspätung.



Bestimmen Sie die Richtung, in welche der Hubschrauber H_2 fliegen muss.

Berechnen Sie die Zeit, die beide Hubschrauber bis zum Eintreffen an der Unglücksstelle benötigen, wenn der Hubschrauber H_1 mit einer Geschwindigkeit von 200 $^{km}/_{h}$ und der Hubschrauber H_2 mit einer Geschwindigkeit von 150 $^{km}/_{h}$ fliegt.

c) Ein dritter Hubschrauber H_3 befindet sich auf einem Routineflug und empfängt den SOS-Ruf am Punkt $H_{3,1}(21|17|2{,}65)$. Von dort aus fliegt er mit dem Kurs $\overrightarrow{a_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2{,}35 \end{pmatrix}$ geradlinig zum Punkt $H_{3,2}(x|y|5)$, den er nach zwei Minuten erreicht.

Am Punkt $H_{3,2}$ schwenkt er auf eine kreisförmige Bahn zum Punkt S ein, um das Bergmassiv zu umfliegen. Der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve hat die Koordinaten $M(13|14|5)$.

Berechnen Sie die gesamte Flugzeit, wenn H_3 die Durchschnittsgeschwindigkeit von $H_{3,1}$ nach $H_{3,2}$ auf der gesamten Strecke beibehält.

d) Während H_1 und H_2 von S aus zur Leitstelle fliegen, steuert H_3 zunächst das Basislager BL an, welches sich in 1000 m Höhe auf einer Wiesenfläche befindet. Die Wiese hat die Form eines unregelmäßigen Vierecks mit den Eckpunkten $A(7{,}5|8|1)$, $B(7{,}5|8{,}5|1)$, $C(8|7{,}75|1)$ und $D(8{,}25|8{,}25|1)$.

Auf direktem Flug ist das Basislager nicht zu erreichen. Deshalb fliegt H_3 1,3 km weit zum Punkt P mit dem Kurs $\overrightarrow{a_4} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dort ändert er seinen Kurs zu $\overrightarrow{a_5} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$.

Begründen oder widerlegen Sie, dass H_3 auf diese Weise einen Punkt auf der Wiese anfliegt.

LÖSUNGEN:

a) Funksignal-Gleichung von Bergwacht: $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Funksignalgleichung von Helikopter H_1:

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gleichsetzen liefert Gleichungssystem mit der Lösung $\lambda = 4$ und $\mu = 5$. Einsetzen von λ oder μ liefert Schnittpunkt S(10|10|5)

b) Abstand H_1 zu S: Der Vektor von Punkt H_1 zu S lautet: $\vec{d} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dessen Länge ist

$|\vec{d}| = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + 4^2} = \sqrt{416} = 20{,}40$ (km)

Abstand H_2 zu S: Der Vektor von Punkt H_2 zu S lautet: $\vec{e} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$. Dessen Länge beträgt

$e = \sqrt{212{,}25} = 14{,}57$ (km).

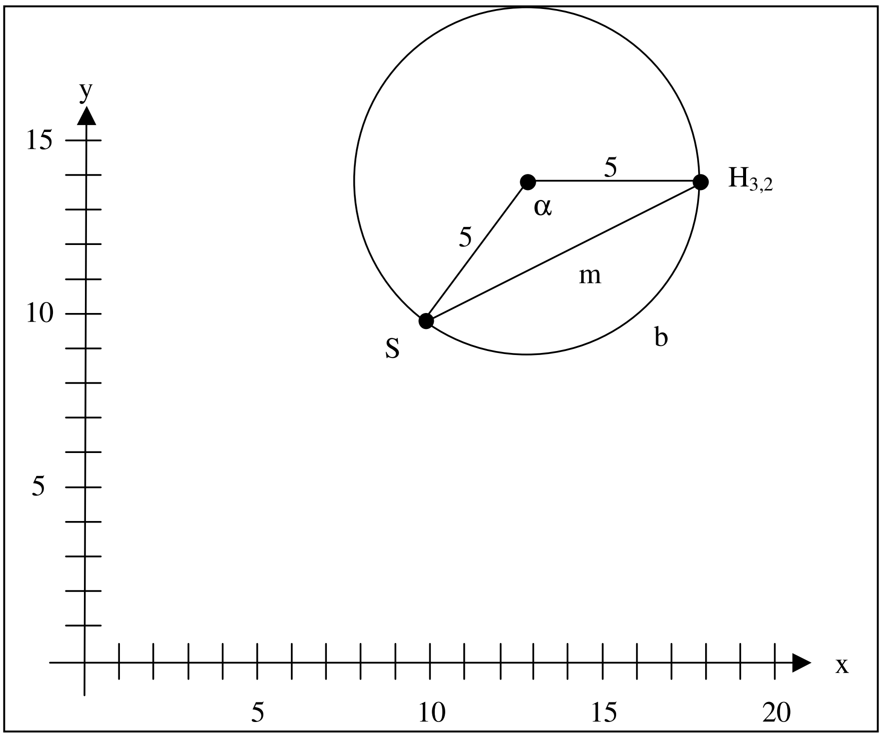
H_1 trifft bei einer Geschwindigkeit von 200 km/h nach $\frac{20{,}40}{200} = 0{,}102$ h = 6 min und 7 s ein, H_2 benötigt für die Strecke bei einer Geschwindigkeit von 150 km/h $\frac{14{,}57}{150} = 0{,}097$ h = 5 min und 50 s. Da er aber 30 s später losfliegt kommt er nach 6 min und 20 s am Unglücksort an.

c) Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \\ 2{,}65 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2{,}35 \end{pmatrix}$ hat die Lösung t = 1, x = 18 und y = 14, d. h. der Punkt $H_{3,2}$ hat die Koordinaten $H_{3,2}(18|14|5)$.

Die Strecke zwischen beiden Punkten beträgt

$f = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2{,}35 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{23{,}5225} = 4{,}85$

(km). Die Geschwindigkeit beträgt also $v = \frac{4{,}85 km}{2 \min} = 145{,}5 \frac{km}{h}$.



Für die Kreisbahn machen wir uns zuerst eine Skizze. Betrachtet wird die Situation von oben in die Ebene mit z = 5

Um den Kreisbogen bestimmen zu können, benötigen wir zunächst den Winkel α. Diesen können wir mit dem Kosinussatz berechnen, wenn wir die Länge der Strecke m berechnet haben.

Die Strecke m berechnet sich durch: $m = \left| -\overrightarrow{0H}_{3,2} + \overrightarrow{0S} \right| = \left| -\begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{80} = 8{,}94 \text{ (km)}$

Der Winkel α berechnet sich dann durch die Gleichung: $m^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$, also $\alpha = 126{,}87°$.

Der Kreisbogen b berechnet sich mithilfe der Formel: $b = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} = 11{,}07 \text{ (km)}$

Bei einer Geschwindigkeit von v = 145,5 $^{km}/_h$ benötigt der Hubschrauber H_3 dafür $t = \frac{11{,}07}{145{,}5} h = 0{,}076h =$ 4 min 34 s.
Insgesamt benötigt der Hubschrauber H_3 also 6 min 34 s für die gesamte Strecke.

d) Der Hubschrauber H_3 startet den Rückflug zum Basislager im Punkt S(10|10|5).
Die Länge des Kursvektors a_4 beträgt $\left|\vec{a}_4\right| = \sqrt{(-2{,}4)^2 + 0^2 + (-1)^2} = 2{,}6$ (km). Da der Hubschrauber nur 1,3 km fliegen soll, gelangt man an die erste Zwischenposition P über $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ 10 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$, also hat P die Koordinaten P(8,8|10|4,5).
Danach fliegt der Hubschrauber in Richtung a_5, bis die z-Koordinate = 1 ist, Dies führt zum Gleichungssystem $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ 10 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$ mit der Lösung s = 1, x = 8 und y = 8, also landet der Hubschrauber im Punkt Q(8|8|1).
Die z-Koordinate ist 1, also landet der Hubschrauber schon einmal auf der Ebene der Wiese. Ob der Hubschrauber nun wirklich in dem Viereck ABCD landet klären wir durch eine Zeichnung (wieder von oben betrachtet in die Ebene mit z = 1):